Πολυβηματικές Αριθμητικές Μέθοδοι

10/1/20

(1) Π.Α.Τ. :
Συνεχές

$$\begin{cases} y' = f(t,y) \quad t \in [a,b] \\ y(a) = y_0 \end{cases}$$

(2) Διακριτό :

$$\begin{cases} a_k y^{n+k} + a_{k-1} y^{n+k-1} + a_{k-2} y^{n+k-2} + \dots + a_0 y^n = \\ = h\left(\beta_k f^{n+k} + \beta_{k-1} f^{n+k-1} + \beta_{k-2} f^{n+k-2} + \dots + \beta_0 f^n\right) \end{cases}$$

$y^0, y^1, \dots, y^{k-1}$, k - δεδομένα

Παράδειγμα (1). $k=1$, $a_1 = 1$, $a_0 = -1$, $\beta_1 = 1$, $\beta_0 = 0$

$$\begin{cases} y^{n+1} - y^n = h f^{n+1} \\ y_0 \end{cases}$$

, δηλ. η πεπλ. Euler.

Είτε RK ή πολυβ. μπορώ να τις αναγάγω σε μια που ξέρω π.χ. Euler, πεπλ. κτ.λ.

Παράδειγμα (2): $k=2$, $a_2=1$, $a_1=-\frac{4}{3}$, $a_0=\frac{1}{3}$, $\beta_2=\frac{2}{3}$

$$\begin{cases} y^{n+2}-\frac{4}{3}y^{n+1}+\frac{1}{3}y^{n}=h\frac{2}{3}f^{n+2} \\ y^0, y^1 \text{ δεδομένα} \end{cases}$$

Επίσης μία πεπλεγμένη μέθοδος

Νέα Ύλη

Συστηματική Κατασκευή Πολυβημ. Μεθόδων

Έστω $P_{n,k}$ πολυώνυμο το πολύ βαθμού k τ.ω να μπορεί να προσεγγίσει τη λύση y.

$$P_{n,k}(t^{n+i})=y(t^{n+i})$$

Σημείωση: Δηλ. η $P_{n,k}(t^{n+i})$ είναι ένα πολ/μο παρεμβολής Lagrange στα σημεία t^{n+i}, $i=0,1,\dots k$

Το $P'_{n,k}(t^{n+i})$ θα μας έδινε την προσέγγιση της $y'(t^{n+i})$ από την σχέση.

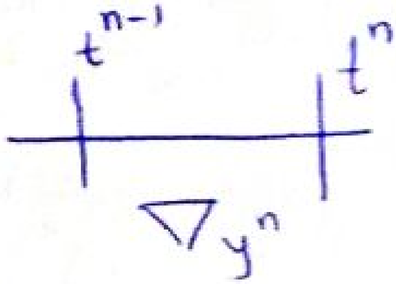
$$y'(t^{n+k})=f(t^{n+k},y(t^{n+k}))$$

Τότε οδηγούμαστε στην εξής μέθοδο:

$$(*)\begin{cases} \sum_{j=1}^{k}\frac{1}{j}\nabla^{j}y^{n+k}=hf^{n+k}, & n=0,1,2,\dots \\ y^0, y^1, y^2, \dots, y^{k-1}, & \text{αρχ. δεδ.} \end{cases}$$

Η ανάδρομη διαφορά στο y^n είναι:

$$\nabla^1 y^n = y^n - y^{n-1}$$



προκύπτει και απο τις οπισθιες διαφορές

η δεύτερης τάξης διαφορά

$$\nabla^2 y^n = \nabla(\nabla y^n) = \nabla(y^n - y^{n-1}) = \nabla y^n - \nabla y^{n-1} =$$
$$= (y^n - y^{n-1}) - (y^{n-1} - y^{n-2}) = y^n - 2y^{n-1} + y^{n-2}$$

Για να υπολογίσω την έκφραση διαφορών

$$\nabla^j y^n = \nabla^{1}(\nabla^{j+1} y^n)$$

απο λογισμό διαφορών.

Η (*) είναι μια κ-βηματική μέθοδος, που μπορει να χρησιμοποιειθεί για αριθμητική επίλυση συστημ. ΣΔΕ και λέγεται <u>μέθοδος ανάδρομων διαφορών</u> με κ-βήματα.

Οποιαδήποτε μεθοδος μπορεί να γραφεί σ'αυτή τη μορφη:

π.χ όμεση Euler:
$y^{n+1} - y^n = hf(t^n, y^n) \Rightarrow$
$\nabla^1 y^{n+1} = hf(t^n, y^n)$

Οι κ-βηματικές μέθοδοι της μορφής:

$$\begin{cases} y^{n+k} - y^{n+k-1} = h \sum_{j=1}^{k} \beta_j f^{n+j} \\ y^0, y^1, \dots, y^{k-1} \text{ δεδομένα} \end{cases}$$

Λέγονται μέθοδοι Adams.

Πεπλεγμένες ($\beta_k \neq 0$) ονομάζονται Adams-Moulton

Άμεσες ($\beta_k = 0$) ονομάζονται:

Adams - Bashforth.

Ευστάθεια

Ορισμός: Μια κ-βημ. μέθοδος, που περιγρ. απο τις σταθ. $\alpha_k, \alpha_{k-1}, \dots, \alpha_0, \beta_k, \beta_{k-1}, \dots, \beta_0$ λέγεται ευσταθής, αν $\exists\, C$ που εξαρτάται απο την f, αλλά όχι απο το h τω. για τις ακολ. (y^n) και (z^n) που παράγονται απο τα ΠΑΤ της μορφής (2) να ισχύει ότι:

$$\max_{0 \le n \le N} |y^n - z^n| \le C \max_{0 \le i \le k-1} |y^i - z^i|$$

Ορισμός : (Συνθήκη των Ριζών)

Η πολυβηματική μέθοδος (2) πληροί την συνθήκη των ριζών, αν για το χαρακτ. της πολ/μο, $\rho(z)$ που ορίζεται ως:

$$\rho(z) = a^k z^k + a^{k-1} z^{k-1} + a^{k-2} z^{k-2} + \dots + a^0$$

ισχύουν:

$$\rho(z) = 0 \Rightarrow |z| \leq 1$$

$$\rho(z) = \rho'(z) = 0 \Rightarrow |z| < 1$$

άρα πρέπει να πάρω το χαρ. πολ., να βρω τις ρίζες του και να εξετάσω την πολλαπλότητά τους.

Πρόταση : Μια πολυβηματική μέθοδος, αν είναι ευσταθής τότε το χαρακτ. της πολ/μο, $\rho(z)$ ικανοποιεί την συνθήκη των ριζών. Αν ικανοποιείται η συνθήκη των ριζών τότε η μέθοδος είναι ευσταθής

(ΘΕΜΑ ΕΣ)

Άσκηση: Έστω η τρι-βηματική μέθοδος:

$$y^{n+3} - \frac{11}{6} y^{n+2} + y^{n+1} - \frac{1}{6} y^{n} =$$

$$= h\left(\frac{1}{12} f^{n+3} + \frac{1}{6} f^{n+2} - \frac{1}{2} f^{n+1} + \frac{1}{12} f^{n} \right)$$

είναι ευσταθής;

Απ. Στην ευστάθεια παίζουν ρόλο τα a_3, a_2, a_1, a_0. Το χ. πολ/μο είναι:
(και όχι τα β_i)

$$\rho(z) = z^3 - \frac{11}{6} z^2 + z - \frac{1}{6} = 0$$

$$\Rightarrow z^3 - \frac{5}{6} z^2 - \frac{6}{6} z^2 + z - \frac{1}{6} = 0$$

$$\cancel{\Rightarrow z^2(z-1) - \frac{6}{6} z^2 + \frac{1}{6} z^2 + z - \frac{1}{6} = 0}$$

$$\cancel{\Rightarrow z^2(z-1) - z^2(z-1) + \frac{1}{6} z(z-1) = 0}$$

$$\cancel{\Rightarrow (z-1)\left(z^2 - z + \frac{z}{6}\right) = 0}$$

$$\Rightarrow z^2(z-1) - \frac{5}{6}(z^2 - z) + \frac{1}{6} z - \frac{1}{6}$$

$$(z-1)\left(z^2 - \frac{5}{6} z + \frac{1}{6}\right) = 0$$

$$\begin{cases} z_1 = 1 \\ z_2 = 1/2 \\ z_3 = 1/3 \end{cases}$$

Άρα $|z_i| \leq 1$, $i = 1, 2, 3$
άρα ικαν. η συνθήκη των ριζών άρα ευσταθής

Τάξη ακρίβειας και συνέπεια (πολυβ.)

Για το ΠΑΤ. (1) θέλουμε την ποσότητα

$$(L_n y)(t) = \sum_{j=0}^{k} \left[a_j y(t+jh) - h\beta_j y'(t+jh) \right] = \delta^n$$

$\downarrow$

τοπικό σφάλμα

Ορισμός: (Τάξη ακρίβειας πολυβ. μεθόδου)

Έστω $y: [a,b] \to \mathbb{R}$, ομαλή συνάρτηση

Αν p είναι ο μεγαλύτερος ακέραιος για τον οποίο ισχύει:

$$\exists\, c = c(y) : \forall\, t \in [a, b-kh] \quad |(L_n y)(t)| \leq C h^{p+1}$$

τότε λέμε ότι η τάξη ακρίβειας της μεθόδου είναι ακριβώς p.

Παρατήρηση: Αν η τάξη ακρίβειας της μεθόδου είναι τουλ. 1 $(p \geq 1)$ η μέθοδος λέγεται συνεπής.

Αναπτύσσοντας κατά Taylor τις $y(t+jh), y'(t+jh)$ ως προς t, καταλήγουμε:

$$(L_n y)(t) = c_0 y(t) + c_1 h y'(t) + c_2 h^2 y''(t) + c_3 h^3 y'''(t) + \dots$$

c_j, $j=0,1,2,3,\dots$ σταθερές ανεξάρτητες των y, t και h, εξαρτώνται από τη μέθοδο

Η πολυβημ. μέθοδος έχει τάξη ακρίβειας ακριβώς p, αν:

$$c_0 = c_1 = c_2 = \dots c_p = 0 \text{ και } c_{p+1} \neq 0,$$

με $c_0 = a_0 + a_1 + a_2 + \dots + a_k = \sum_{i=0}^{k} a_i$

$$c_1 = a_1 + 2a_2 + 3a_3 + \dots + k a_k - (\beta_0 + \beta_1 + \dots + \beta_k)$$

Για $j \geq 2$: $c_j = \frac{1}{j!}(a_1 + 2^j a_2 + 3^j a_3 + \dots + k^j a_k) -$

$$- \frac{1}{(j-1)!}(\beta_1 + 2^{j-1}\beta_2 + 3^{j-1}\beta_3 + \dots + k^{j-1}\beta_k)$$

Παρατήρηση: Ικανή και αναγκαία συνθήκη για την συνέπεια της μεθόδου ($p \geq 1$) είναι να ισχύει ότι $c_0 = c_1 = 0$

SUPER SOSSS !

Άσκηση: (α) Υπολ. τις c_j για την πολυβ. μέθ.

$$\begin{cases} y^{n+2} - y^n = 2hf^{n+1} & n=0,1,2,\dots,N-2 \\ y^0, y^1 \end{cases}$$

Απ. (α) Τα $c_0 = a_0 + a_1 + a_2 = -1 + 0 + 1 = 0$

$$c_1 = a_1 + 2a_2 - (\beta_0 + \beta_1) = 0 + 2\cdot 1 - (0+2) = 0$$

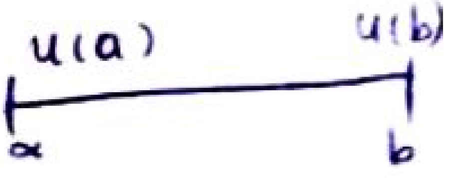
Άρα $c_0 = c_1 = 0$. Άρα είναι συνεπής

β) Ν.δο. η τάξη ακρίβειας της μεθόδου Euler είναι 1 και της μεθ. του τραπ. είναι 2

ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΑ ΣΥΝΟΡΙΑΚΩΝ ΤΙΜΩΝ

Μεθοδοι Σκοπευσης (shouting methods)

(1) Π.Σ.Τ. $\begin{cases} u'' = f(u, u', t), & t \in [\alpha, b] \\ u(a) = c, & u(b) = d \end{cases}$



Ζητάμε η λύση του προβλήματος u να είναι C^2 δηλ. $u \in C^2([\alpha, b])$, $f \in C([\alpha, b] \times \mathbb{R} \times$

(2) $\begin{cases} u'' = f(u, u', t), & t \in [\alpha, b] \\ u(a) = c, & u'(a) = s \in \mathbb{R} \text{ άγνωστος} \end{cases}$

Το ανάγουμε σε σύστημα ΣΔΕ $1^{ης}$ τάξης

$$\underline{\Pi\text{ΑΤ}}\ (3)\quad \begin{cases} u_1' = u_2 \\ u_2' = f(t, u_1, u_2) \quad t \in [\alpha, b] \\ u_1(a) = c \quad , u_2(a) = s \end{cases}$$

Οδηγούμαστε στην αριθμ. επίλυση διαδ. ΠΑΤ της μορφής (3), με $u'(a) = s_n$, $n = 1, 2, 3, \dots$, η ακολουθία $s_n \to s^*$, η τιμή της αρχικής συνθήκης που αναζητούμε.

ΜΕΘΟΔΟΣ ΠΕΠΕΡΑΣΜΕΝΩΝ ΔΙΑΦΟΡΩΝ

$$\Pi\Sigma\text{Τ} : (1) \begin{cases} -u''(t) + q(t)\,u(t) = f \quad , t \in [\alpha, b] \\ u(a) = u(b) = 0 \quad , \text{Dirichlet} \end{cases}$$

π.χ. $u'(a) + c_1 u(a) = 0$.

Ζητάμε την $u(t) \in C^2([\alpha, b])$ και $q, f \in C([\alpha$ η q να λαμβάνει μη αρνητικές τιμές $\forall\, t \in [\alpha, b]$.

Κεντρικές πεπερασμένες διαφορές για την παράγωγο 2ης τάξης:

← πως προκύπτει (από Taylor)

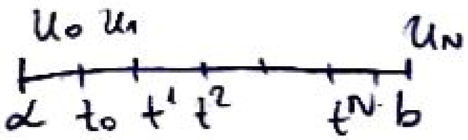
$$u^{n\,''} = \frac{u^{n+1}-2u^{n}+u^{n-1}}{h^2} + O(h^2)$$

Για ομοιόμορφη διαμέριση, $h=\frac{b-a}{N}$, έχουμε ότι το αντίστοιχο διακριτό ανάλογο είναι:

← πεπλεγμ.

$$-\frac{1}{h^2}\left(u^{n+1}-2u^{n}+u^{n-1}\right)+q(t^{n})u^{n} = f(t^{n})$$

$n=1,2,\dots,N$. ΣΣ: $u_0=u_N=0$



Έχουμε ένα $N\times N$ γραμμικό σύστημα:

$A\bar{u} = h^2\bar{f}$,

↓ τριδιαγώνιος και συμμετρικός

$$A=\begin{pmatrix} 2+h^2q(t^1) & -1 & & \cdots \\ -1 & 2+h^2q(t^2) & -1 & \\ \vdots & & & \\ \vdots & -1 & 2+h^2q(t^3) & \end{pmatrix}$$

$n=1$:

$$-\frac{1}{h^2}\left(u^2-2u^1+u^0\to 0\right)+q(t^1)u^1=f(t^1)$$

$n=2$.

$$-\frac{h}{2}\left(u^3-2u^2+u^1\right)+q(t^2)u^2=f(t^2)$$

ο A είναι τριδιαγώνιος και συμμετρικός αν μπορεί να αναστραφεί τότε το σύστημα έχει μοναδική λύση, αρκεί να εξασφαλίσω ότι ο πίνακας είναι θετικά ορισμένος

πυκνός πίνακας : δεν έχει μηδενικά

αραιός πίνακας : έχει πολλά μηδενικά.